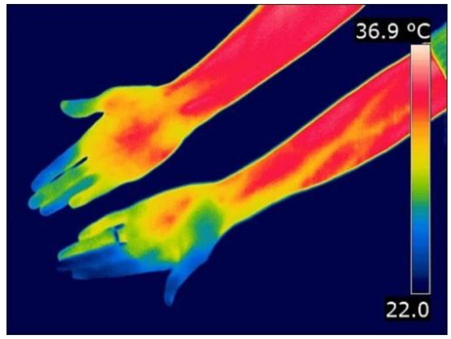
Lista zadań nr 4 – Dynamika, siła zależna od położenia (1h)

(b) Dynamika punktu (siła zależna od czasu *ma=F(t)*)

Zad. 4.1 Na cząstkę o masie *m =1 kg* działa siła zależna od czasu opisana w następujący sposób:

F (t) = $t^2 \cdot \hat{\imath} + t \cdot \hat{\jmath}$

Policz minimalną drogę, jaką pokona cząstka po czasie t=10 s przyjmując układ współrzędnych

(x, y, z, t) w miejscu rozpoczęcia się ruchu oraz zakładając, że dla t=0, **R** (0,0,0) i **V** (0, 0, 0).

Zad.4.2* Na cząstkę o masie *m=1kg* działa siła zależna od czasu opisana w następujący sposób:

F (t) = $\sin(t) \cdot t^2 \cdot \hat{\imath} + e^t \cdot \hat{\jmath}$.

Policz, jaka będzie prędkość cząstki po 10 s, gdy warunki początkowe dla tego zagadnienia są następujące: R_o(t=0)=(2, 3, 5) [m] oraz V_o(t=0)= (10, 20, 30) [km/h].

UWAGA: Całkowanie przez części

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int h'(x)g(x)\mathrm{d}x = h(x)g(x) - \int h(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Zad. 4.3 Na cząstkę o masie *m* =1kg działa siła zależna od czasu opisana w następujący sposób:

F (t) = (t^2, t, cos(t)). Jak zależeć od czasu będzie wektor wodzący tej cząstki. Zakładamy, że dla t=0, **R** (0,0,0) i **V** (0, 0, 0).

Zad. 4.4 Punkt materialny porusza się w płaszczyźnie xy, przy czym jego ruch opisany jest równania x = at y=bt-ct^2, gdzie a=50cm/s, b=200cm/s, c=25cm/s^2. Znaleźć po upływie czasu t=3s: a) wartość prędkości i przyśpieszenia punktu; b) kąt między wektorami prędkości i przyśpieszenia.

Zad. 4.5 Ciało o masie *m=1kg* w chwili *t*=0 znajduje się w punkcie $x_0 = 0$ i ma prędkość $V_0 = 0$. W chwili *t*=0 zaczyna działać na nie siła zależna od czasu: **F**(t) = Asin(ωt)**i**. Opisać ruch tego ciała.

UWAGA: Całkowanie funkcji złożonej

Zad. 4.6 Ruch można przybliżyć równaniami parametrycznymi: x(t) = cos(Bt^2), y(t) = Asin(Bt^2), gdzie A oraz B to stałe parametry. Znajdź równania ruchu dla tego zagadnienia (V(t), a(t), F(t)).

Zad. 4.7 Ruch punktu materialnego w biegunowym układzie odniesienia opisują równania:

R=bt, ϕ =c/t, gdzie c=*const*. Znajdź tor ruchu, prędkość i przyspieszenie punktu, jako funkcję czasu.

<u>(c) Dynamika punktu (siła zależna od prędkości *ma=F(V)*)</u>

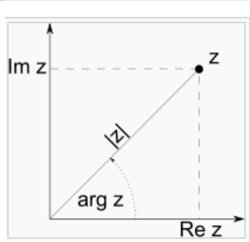
Zad. 4.8 Na samochód o masie *m* działa siła hamująca ruch, proporcjonalna do prędkości F=-kV, gdzie k jest stałą. Znajdź: (a) zależność prędkości ciała od czasu, (b) jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się. Prędkość początkowa ciała V_0.

Zad.4.9 Na samochód o masie *m* działa siła hamująca F=-kV^3, gdzie k jest stałą. Znajdź: (a) zależność prędkości ciała od czasu, (b) jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się. Prędkość początkowa ciała V_0.

Zad*. 4.10 Kulka z pistoletu o masie *m* została wystrzelona z karabinu pionowo w dół z wysokości H=10m nad poziomem basenu z prędkością V_0=100m/s. Jaką będzie miała prędkość po 2s od zanurzenia w wodzie, przy założeniu, że działa na nią siła oporu ośrodka proporcjonalna do jej prędkości.

Zad.4.11* Znaleźć równania ruchu oraz równania toru cząstki o masie *m* oraz ładunku elektrycznym *q* poruszającej się w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji **B**. Siła jaka działa na taką cząstkę wyraża się następującym wzorem: **F** = q**V** x **B**. Dane początkowe $V_0 \neq 0$, R_0=0. Zaniedbać działanie na cząstkę siły grawitacji.

UWAGA: pomocne może być skorzystanie z właściwości liczb zespolonych oraz wzorów Eulera



$z = x + iy = |z|\big(\cos(\alpha) + isin(\alpha)\big) = |z|e^{i\alpha}, gdzie\ i^2 = -1$

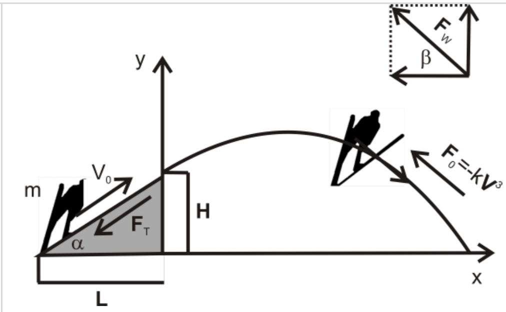
Re(z)=a (część rzeczywista liczby z)

Im(z)=b (część urojona liczby z)

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

Wzory Eulera

Zad.4.12* Skoczek przy wejściu w próg miał prędkość V_{01}. Podczas lotu działają na niego dodatkowo zależna od prędkości siła oporu powietrza $\mathbf{F}_0 = -k\mathbf{V}^3$ skierowana przeciwnie do jego prędkości oraz stała siła wiatru $\mathbf{F}_W$. Wyznacz zależność prędkości lotu skoczka od czasu oraz zasięg jego skoku. Jakie parametry znacząco określają ten zasięg?

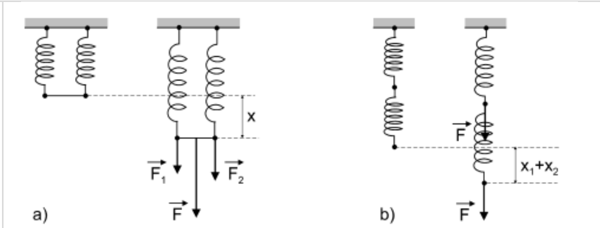


UWAGA: Całkowanie przez podstawienie

$\frac{dy}{dt} = f(by+c)$ podstawić $u = by + c$ a następnie $\frac{du}{dt} = b\frac{dy}{dt}$

(d) Dynamika punktu (siła zależna od położenia *ma=F(x)*)

Zad. 4.13 Jak zmieni się okres drgań pionowych ciężaru wiszącego na dwóch jednakowych sprężynach, gdy połączenie szeregowe sprężyn zostanie zastąpione połączeniem równoległym?



Zad. 4.14 Samochód o łącznej masie 1300 kg posiada zawieszenie, na które składają się cztery sprężyny. Każda ze sprężyn charakteryzuje się stałą o wartości: 20 000 N/m. Jeżeli dwie osoby wejdą do tego samochodu o łącznej masie 160 kg jaka będzie częstotliwość drgań samochodu po najechaniu dziury w drodze. Założyć równomierny rozkład masy oraz brak tłumienia. Ile czasu zajmie wykonanie dwóch pełnych drgań przez samochód?

Zad. 4.15 Na poziomym, doskonale gładkim stole leży przymocowane sprężyną do ściany ciało o masie M. W ciało trafia pocisk o masie m. lecący poziomo z prędkością V i zostaje w nim. Po zderzeniu ciało wraz z pociskiem wykonuje drgania harmoniczne z amplitudą A. Wyznaczyć częstość tych drgań.

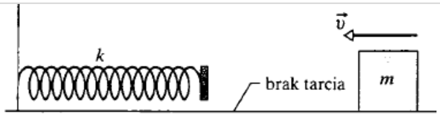
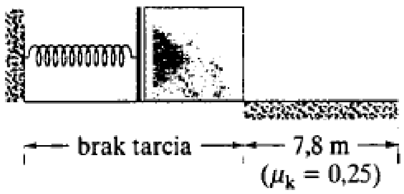
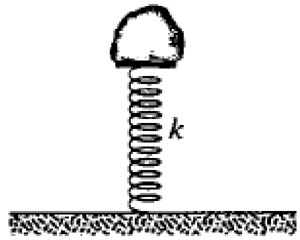
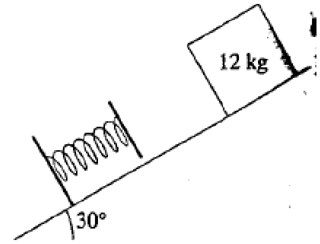
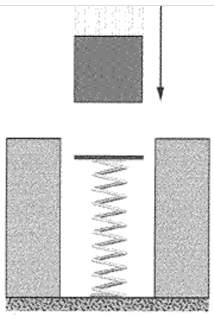
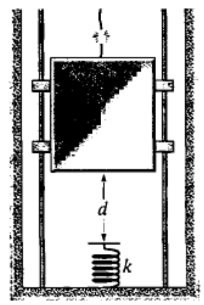
Zad. 4.16 Pozioma platforma wykonuje drgania o amplitudzie A. Jak może być maksymalna częstość drgań platformy, by leżące na niej ciało nie oderwało się (a) w kierunku poziomym, (b) pionowym? Współczynnik tarcia ciało-platforma wynosi f.

Zad. 4.17* Rowerzysta wraz z rowerem o łącznej masie 80 kg spadają z wysokości 3m. Policz/oszacuj, po jakim czasie amplituda drgań amortyzatorów przy kołach roweru będzie dziesięciokrotnie mniejsza niż ich maksymalne wychylenie. Założenia: masa rowerzysty wraz z rowerem odkłada się jednakowo na amortyzatorach, amortyzator stanowią dwie sprężyny połączone równolegle zanurzone w oleju. Zakładamy k = 20 000 N/m.

Zad. 4. 18 Na Rys. 1 przedstawiono skrzynię o masie 0.4 kg ślizgającą się bez tarcia po poziomej ladzie z prędkością V=0.5m/s. W pewnej chwili wpada ona na swobodny koniec sprężyny o stałej sprężystości k=750N/m w wyniku czego sprężyna jest ściskana. O jaki dystans d będzie skrócona sprężyna w chwili gdy skrzynia zwolni do prędkości równej zeru ?

Zad. 4.19 Na Rys. 2 przedstawiono klocek o masie 3.5 kg wprawiony w ruch przyspieszony przez ściśniętą sprężynę o stałej sprężystości 640N/m. Gdy sprężyna osiąga długość, odpowiadającą stanowi, w którym jest nieodkształcona, klocek odrywa się od niej i porusza się po powierzchni poziomej aż do zatrzymania się, przebywając przy tym drogę 7.8 m. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a tą powierzchnią wynosi 0.25. a) O ile wzrasta przy tym energia termiczna układu klocek-podłoże? b) Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna klocka? c) O ile była ściśnięta sprężyna, gdy rozpoczął się ruch klocka?

Zad. 4. 20 Na Rys.3 przedstawiono kamień o masie 8kg spoczywający na ustawionej pionowo sprężynie. Sprężyna jest ściśnięta o 10 cm. A) ile wynosi stała sprężystości tej sprężyny? b) naciskając na kamień, przemieszczamy go w dół o dalsze 30 cm, przy czym zwalniamy nacisk. Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ściśniętej sprężyny tuż przed zwolnieniem nacisku? Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kamień-Ziemia w czasie ruchu kamienia, od punktu zwolnienia nacisku do punktu jego największego wzniesienia? d) Na jaką największą wysokość – licząc od punktu zwolnienia nacisku- wzniesie się kamień?

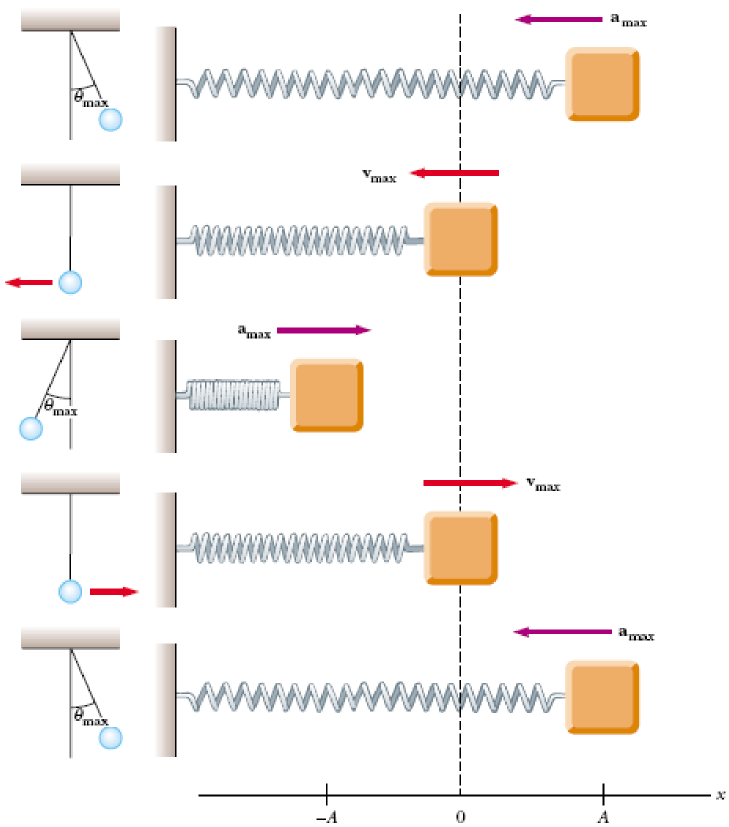
 Rys.1  Rys.2	 Rys. 3	 Rys. 4
	 	
Rys. 5	Rys.6	

Zad. 4.21 jak pokazano na Rys.4, klocek o masie 12kg znajdujący się początkowo w spoczynku, zaczyna poruszać się bez tarcia wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia 30o. Na jego drodze znajduje się sprężyna, którą można ścisnąć o 2 cm, działając na nią siłą 27 N. Klocek zwalnia do prędkości równej zeru po ściśnięciu sprężyny o 5.5 cm. a) Jaką drogę przebył klocek wzdłuż równi od punktu w którym ponownie osiągnął prędkość równą zeru? b) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego zetknięcia ze sprężyną ?

Zad. 4.22 (Rys.5) Klocek o masie 250 g spada na nieodkształconą sprężynę pionową ostałej sprężystości k =2.5N/m. Po zetknięciu ze sprężyną klocek ściska ją o 12 cm, do osiągnięcia przez niego prędkości równej zeru. Jaka praca zostaje wykonana nad klockiem w czasie ściskania sprężyny przez: a) działającą na niego siłę ciężkości, b) siłę sprężystości sprężyny ?, c) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego dotarcia do sprężyny (pomiń tarcie)? d) Ile wynosiłoby maksymalne ściśniecie sprężyny, gdyby prędkość klocka w chwili dotarcia do sprężyny była dwukrotnie większa?

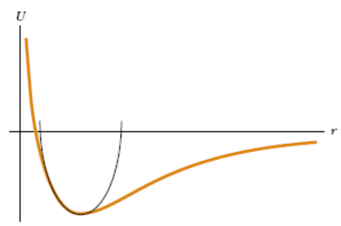
Zad. 4.24 (Rys. 6) Lina, na której zawieszona jest kabina windy, urywa się gdy kabina stoi na pierwszym piętrze, a jej podłoga znajduje się na wysokości d=3.7m nad sprężyną amortyzującą, o stałej sprężystości k=0.15 MN/m. Układ zabezpieczający zwiększa wtedy docisk uchwytów kabiny do szyn windy, tak że ruch kabiny utrudnia siła tarcia o wartości 4.4 kN. a) Wyznacz prędkość kabiny w chwili jej dotarcia do sprężyny amortyzującej, b) wyznacz długość odcinka x, o jaki maksymalnie zostanie ściśnięta sprężyna (siła działa także podczas ściskania sprężyny), c) wyznacz wysokość, na jaką wzniesie się potem ponownie kabina wzdłuż szybu, d) korzystając z zasady zachowania energii, wyznacz w przybliżeniu całkowitą drogę, przebytą przez kabinę do jej zatrzymania. Siła tarcia jest zero gdy winda się nie porusza.

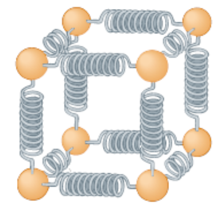
Analogie pomiędzy ruchem oscylatora, a ruchem wahadła matematycznego.



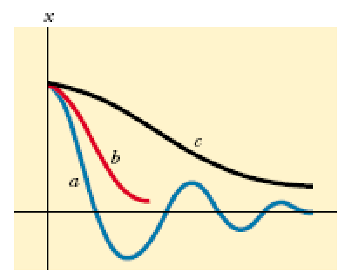
t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Zad. A Na ciało o masie *m* działa siła **F**= ($-k_1x$, $-k_2y$). Jak wyglądać będzie trajektoria takiego punktu w dla (a) $k_1=k_2$, (b) $k_1<k_2$, (c) $k_1>k_2$. Jaką funkcyjną zależność od wychylenia U(x) będzie miała energia kinetyczna takiego trójwymiarowego układu?





Zad. B. Ciało o masie m zaczepiono na sprężynie, zanurzono w cieczy i wprawiono w ruch. Przeanalizuj, dla jakich warunków w układzie otrzymamy zależności położenia od czasu x(t) przedstawione na rysunku.



Zad. C (Prąd zmienny) Do drgań w obwodzie RLC, zawierającym szeregowo połączone opór R, indukcyjność L i pojemność C stosuje się takie samo równanie różniczkowe jak dla układu masa – sprężyna wykonującego drgania tłumione. Równanie dla natężenia prądu ma wówczas postać:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0$$

Przez analogię z układem mechanicznym (masa – sprężyna) znaleźć:

a) równanie opisujące zależność I(t),

b) wyrazić parametry występujące w równaniu I(t) przez R, L, C.

Zad. D (Model Drudego-Lorenza) Pod wpływem zewnętrznego pola elektromagnetycznego działającego na materię, znajdujący się w niej ładunek elektryczny wykonywać zaczyna drgania opisane równaniem postaci:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mathrm{m}\omega_0^2\mathrm{x}+\gamma m\frac{dx}{dt}=-\mathrm{q}\vec{\mathrm{E}},$$

gdzie x to wychylenie ładunku q z położenia równowagi, γ to współczynnik tłumienia, a $\vec{\mathrm{E}}=\vec{\mathrm{E}}_S\exp(-\mathrm{i}\omega\mathrm{t})$ opisuje pole elektromagnetyczne. Pokazać, dla jakiej częstotliwości fali padającej otrzymamy maksymalny moment dipolowy, gdy zdefiniowany jest on jako: **d** = **x**·q?